

基于数值模拟-机器学习的缓倾斜铝土矿矿柱承载力预测方法

王德玉¹, 朱德福^{1,2,3}, 于彪彪¹, 王 沉⁴

(1. 太原理工大学 原位改性采矿教育部重点实验室, 山西 太原 030024; 2. 西安交通大学 航天航空学院, 陕西 西安 710049; 3. 广铝集团有限公司, 广东 广州 510450; 4. 贵州大学 矿业学院, 贵州 贵阳 550025)

摘 要: 矿柱强度具有显著的倾角效应, 准确预测倾斜矿柱的强度是保障倾斜矿体地下采场安全的关键。为准确预测缓倾斜矿柱强度, 融合运用参数化建模的灵活交互性、数值模拟的样本数据强扩展性与机器学习方法的数据驱动优势, 建立缓倾斜矿柱强度预测模型。基于 Rhino 中 Grasshopper 平台编制缓倾斜矿柱参数化建模程序, 结合某铝土矿裂隙产状参数构建了 200 组黏合块体-离散裂隙网络 (BBM-DFN) 矿柱数值模型。采用 FLAC^{3D}-3DEC 耦合模拟方法, 依据试错法标定后的岩块与节理参数, 开展了缓倾斜矿柱承载特性试验, 监测并建立了机器学习缓倾斜矿柱强度数据集, 且验证了此数据集的可靠性。分别以支持向量机 (SVM)、极限学习机 (ELM)、轻量梯度提升机 (LightGBM) 构建了缓倾斜矿柱强度预测模型, 利用遗传编程 (GP) 和改进的量子粒子群算法 (IQPSO) 2 种优化算法进一步提高模型性能, 建立了缓倾斜矿柱强度与其影响因子之间的非线性映射关系。结果表明: 矿体倾角对矿柱强度影响显著, 同一尺寸矿柱随倾角的增加其强度显著下降, 而不同宽高比矿柱的影响规律存在差异; 当宽高比小于 1 时, 矿柱影响因子敏感性主次顺序为: 倾角 > 高度 > 宽度; 当宽高比大于 1 时, 其影响因子敏感性主次顺序为: 宽度 > 倾角 > 高度; 交叉验证了 SVM 模型是缓倾斜矿柱强度预测的最佳模型 ($R^2=0.921$; $R_{EVS}=0.926$; $R_{MAE}=1.225$; $R_{MSE}=2.367$), 结合 GP 与 IQPSO 算法优化后模型预测性能得到了进一步提升 ($R^2=0.976$; $R_{EVS}=0.977$; $R_{MAE}=0.465$; $R_{MSE}=0.862$)。采用 GP 的符号回归方法得到了缓倾斜铝土矿柱强度表达式, 对比经典矿柱强度理论验证了模型的准确性, 拓新了倾斜矿柱强度的预测思路。

关键词: 参数化建模; 数值模拟; 机器学习; 缓倾斜矿柱; 强度预测模型

中图分类号: TD325; TP181 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-9993(2025)03-1511-16

Predicting bearing capacity of gently inclined bauxite pillar based on numerical simulation and machine learning

WANG Deyu¹, ZHU Defu^{1,2,3}, YU Biaobiao¹, WANG Chen⁴

(1. Key Laboratory of In-Situ Property-Improving Mining of Ministry of Education, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China; 2. School of Aerospace Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 3. Galuminium Group Co., Ltd., Guangzhou 510450, China; 4. College of Mining, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

收稿日期: 2024-07-25 策划编辑: 郭晓炜 责任编辑: 李雅楠 DOI: 10.13225/j.cnki.jccs.2024.0878

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (52174124, 51904200); 山西省重点研发计划资助项目 (202202090301011)

作者简介: 王德玉 (1998—), 男, 博士研究生。E-mail: wangdeyu1114@link.tyut.edu.cn

通讯作者: 朱德福 (1988—), 男, 副研究员, 博士生导师。E-mail: zhudefu@tyut.edu.cn

引用格式: 王德玉, 朱德福, 于彪彪, 等. 基于数值模拟-机器学习的缓倾斜铝土矿矿柱承载力预测方法[J]. 煤炭学报, 2025, 50(3): 1511-1526.

WANG Deyu, ZHU Defu, YU Biaobiao, et al. Predicting bearing capacity of gently inclined bauxite pillar based on numerical simulation and machine learning[J]. Journal of China Coal Society, 2025, 50(3): 1511-1526.



移动阅读

Abstract: Pillar strength is significantly affected by inclination, making accurate prediction of inclined pillar strength crucial for the safety of underground quarries in inclined ore bodies. To address this, a pillar strength prediction model is established by integrating parametric modelling's flexible interactivity, the scalability of numerical simulation sample data and the data-driven advantages of machine learning methods. A parametric modelling program for gently inclined pillar was compiled based on the Grasshopper platform in Rhino, furthermore, the fracture production parameters of bauxite were incorporated into a 200-group Bonded Block Discrete Fracture Network (BBM-DFN) pillar numerical model. A coupled FLAC^{3D}-3DEC simulation method was employed to conduct tests on the bearing characteristics of a gently inclined pillar, based on the rock mass and joint parameters that had been calibrated by the trial-and-error method, monitor and build a machine learning gently inclined pillar strength dataset and verify its reliability. Support Vector Machine (SVM), Extreme Learning Machine (ELM) and Light Gradient Boosting Machine (LightGBM) were used to construct the model for predicting the strength of gently inclined pillars. Additionally, two optimization algorithms, Genetic Programming (GP) and Improved Quantum Particle Swarm Algorithm (IQPSO), were used to enhance model performance and establish a non-linear mapping relationship between the influencing factors and the strength of the gently inclined pillars. The study indicated that the orebodies inclination effect significantly impacts pillar strength. Specifically, pillar strength decreases markedly with increasing inclination for pillars of the same size, with variations depending on the width-to-height ratio. For $w/h < 1$, the sensitivity order of influencing factors on gently pillar strength was as follows: inclination > height > width. For $w/h > 1$, the sensitivity order of the influencing factors was as follows: width > inclination > height; SVM is the best model for the gently inclined pillar strength prediction ($R^2=0.921$; $R_{EVS}=0.926$; $R_{MAE}=1.225$; $R_{MSE}=2.367$), and the model prediction performance is further improved after combining the optimizations of GP and IQPSO algorithms ($R^2=0.976$; $R_{EVS}=0.977$; $R_{MAE}=0.465$; $R_{MSE}=0.862$). The expression for the strength of gently inclined bauxite pillars was obtained by symbolic regression based on GP. The accuracy of the model was tested against the classical theory of pillar strength, extending the idea of predicting the strength of inclined pillars.

Key words: parametric modelling; numerical simulation; machine learning; gently inclined pillar; strength prediction model

0 引 言

矿体倾角引起的剪切力变化对倾斜矿柱的稳定性具有显著影响^[1-2]。采用房柱法开采倾斜矿体时,矿柱通常沿其矿层倾角方向留设,由于倾斜层状岩体的强各向异性及应力分布不均性,导致倾斜矿柱与水平矿柱的承载特性存在较大差异^[3-4]。山西煤下铝矿体以似层状—水硬铝石型铝土矿为主,矿体倾角以缓倾斜($5^\circ \sim 30^\circ$)为主,矿石硬度高(普氏系数约为 $8 \sim 16$)。由于机械化开采难度较大,主要采用房柱式开采^[5-6]。矿柱作为房柱式采空区内唯一的支撑结构,其稳定性对保障采场安全、提升资源回采率、控制岩层移动及减小地表沉降等具有重要意义^[7-8],而矿柱强度是评价矿柱稳定性的关键因素^[9]。

在水平和近水平矿柱强度理论计算方面,已有研究提出了线性^[10-12]、指数^[13]和幂函数^[14-15]等类型的矿柱强度经验公式,为矿柱的稳定性评价奠定了基础。然而,这些经验公式主要侧重于矿柱尺寸效应与单轴抗压强度,鲜有考虑倾角因素对强度的影响机制。与水平矿柱相比,缓倾斜矿柱强度受到矿体倾角因素的

显著影响,使得其力学行为和破坏模式变得更加复杂^[16]。传统的未考虑倾角作用的矿柱强度理论无法有效评估倾斜矿柱的强度^[17]。

在倾斜矿柱强度研究方面,JESSU等^[18]开展实验室试验与数值模拟,研究砂岩和石灰岩强度随倾角变化的强度折减系数,并建立了强度折减系数与倾角之间的关联;罗斌玉等^[19]以缓倾斜矿柱为研究对象,提出了矿柱强度的解析式,并结合数值模拟探讨了倾角效应的影响机制;姜立春等^[20]对某石灰石矿非对称顶板—矿柱支撑结构体进行了研究,建立了结构体承载力学模型,阐明了倾角与跨度比对顶板变形特征及矿柱失稳破坏模式的影响机制;DAS等^[21]通过数值模拟分析了矿柱内应力分布特征,揭示了倾斜矿柱的破坏机理,并通过工程实践验证了其合理性。上述研究揭示了倾角对矿柱承载特性的影响机制,并构建了部分典型倾斜矿柱强度公式,为倾斜矿柱强度的计算提供了理论依据。

综上所述,目前已有矿柱强度的研究方法主要包括理论分析^[15]、经验强度分析^[17]、数值模拟^[22]和实验室试验^[23]等。由于岩体的复杂各向异性,传统的研究

方法和现有理论在预测矿柱强度时存在局限性,即研究对象单一缺乏普适性,且未能充分考虑影响因子的相关性。机器学习则擅长处理复杂的非线性问题,具备自定义、规模化和高维度处理的优势,能够深入挖掘变量之间的关系。

机器学习方法在矿业工程领域中的应用日益广泛。MARK^[24]总结了过往 25 a 矿柱设计的科学依据,提出了当前方法的局限性,并指明了以基于工程实例数据库的智能优化算法是未来矿柱设计的主要研究方向。WU 等^[25]提出了从岩石中晶体颗粒的微观参数预测岩石的宏观参数的方法,并利用 5 种机器学习模型对岩石的单轴抗压强度与弹性模量进行了预测。ZHU 等^[26]利用 RS2 建立 252 组砂岩单轴压缩样本集,采用 4 种机器学习模型预测开展了黏聚力和内摩擦角预测。课题组^[27]以水平铝土矿柱为研究对象,分析了矿柱的尺寸效应,构建了 SVM、BPNN、RF、GPR 4 种矿柱强度模型,并得出 SVM 为适用于水平铝土矿柱的最佳模型。

上述研究为矿柱强度的倾角与尺寸效应研究提供了丰富的机器学习模型参考。然而,对于铝土矿矿柱,其可收集与参照的现场工程实例数据有限;实验室岩样测试得出的仅为单轴抗压强度,缺乏尺度效应对矿柱强度的影响,且工程现场难以对大尺寸矿柱的承载能力进行实测;基于经验设计的方法,局限于特定的地质环境,依赖于以往的矿柱设计案例^[28]。而对于复杂的矿柱几何形状或边界条件,数值模拟为其稳定性研究提供了一种有效方法。依据实测的力学参数模拟矿柱在此类复杂条件下的稳定性,可以实现样本数据库的扩展,弥补铝土矿矿柱实测案例的缺乏,增强样本的可靠性,从而提高铝土矿矿柱强度预测的准确性。

笔者以缓倾斜铝土矿矿柱为研究对象,基于 Rhino 中 Grasshopper 平台编制参数化建模电池组,实现缓倾斜矿柱参数化(长、宽、高与倾角)建模。利用 FLAC^{3D}-3DEC 耦合模拟方法,开展矿柱承载特性试验,建立机器学习模型所需矿柱强度数据集。对缓倾斜矿柱强度影响因子进行敏感性分析,探究其与矿柱强度之间的内在联系。分别采用 SVM 算法、ELM 前馈神经网络、LightGBM 集成学习算法建立缓倾斜矿柱强度预测模型,依据模型评价指标选取最优模型。基于 GP 与 IQPSO 2 种优化算法对最佳模型进一步优化,构建一种缓倾斜矿柱强度预测的智能优化算法模型,利用模型建立矿柱强度与其影响因子的非线性映射关系。采用 GP 的符号回归拟合缓倾斜铝土矿柱强度表达式,并结合模型评价指标和经典的矿柱强度理

论验证其准确性,研究能够为倾斜矿柱强度的预测提供新思路。

1 矿柱强度预测方法

为准确高效地预测缓倾斜铝土矿矿柱强度,采用参数化建模、耦合模拟与机器学习相结合的研究方法,具体过程如下:

1) 参数化方法建立 BBM-DFN 矿柱模型,控制了块度、节理因素对倾角与尺寸效应的影响,同时实现其批量化建模,极大提高了建模效率。

2) 基于参数化矿柱模型,采用 FLAC^{3D}-3DEC 耦合模拟方法,开展缓倾斜矿柱承载特性试验,并建立机器学习矿柱强度数据集。

3) 利用机器学习方法构建多种缓倾斜矿柱强度预测模型,并基于优化算法对矿柱强度模型进一步优化,建立一种适用于缓倾斜矿柱强度预测的最佳模型。

1.1 矿柱参数化建模方法

1.1.1 BBM-DFN 矿柱模型

对于岩体之类的离散特征介质在受力时呈现的不连续形变现象,描述介质细观结构和破裂行为的离散元对岩体变形与破坏研究具有独特优势。粘结块体模型(BBM)是离散元表征岩体结构的一种模式,由早期的粘结颗粒模型(BPM)衍生而来。多采用四面体或多面体单元组合的形式,在应力作用下易在其子接触处断裂,以模拟裂缝的萌生、发育与扩展过程^[29]。

BBM 建模流程主要包括离散为块体结构和模型中插入节理组。由于岩体裂隙的产状、尺寸和分布特征都具有随机性,而离散裂隙网络(DFN)通过设置圆盘的断裂位置、大小、数量、间距、倾向和倾角等参数可以较好表征出岩体裂隙的非均匀性。

因此,采用 BBM-DFN 描述矿柱中岩块分布特征。即 BBM 采用 Voronoi 块体建立矿柱,遍历块体采用四面体单元进行剖分,并结合矿体裂隙分布特征插入 DFN 节理组,从而建立能准确反映裂隙分布特征的矿柱结构模型,BBM 模型结构如图 1 所示。

1.1.2 参数化建模方法

参数化模型具有灵活性、可编辑性、自动化与批量化建模的优势。基于 Rhino 中 Grasshopper 平台编制了参数化建模电池组,实现缓倾斜矿柱的参数化建模,其具体流程如下:

1) 通过调整缓倾斜矿柱尺寸参数(长、宽、高)与倾角控制其形状。利用网格边长参数调整 Voronoi 中心点分布,统一密度生成 Voronoi 块体,从而控制块度、节理对尺寸效应的影响。

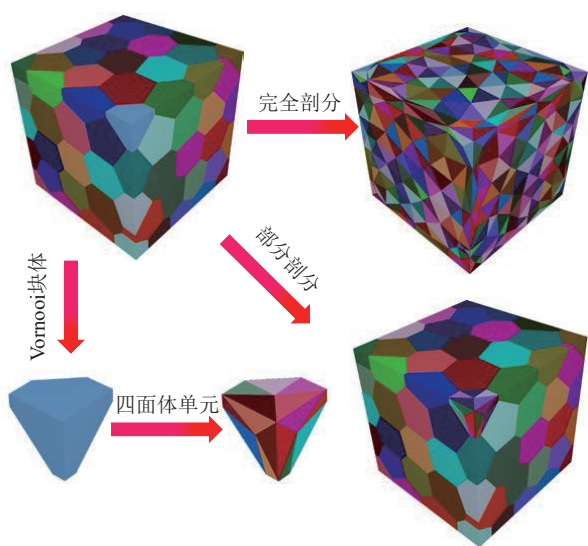


图1 BBM模型结构

Fig.1 BBM modelling structure

2) 以 Voronoi 块体中心点为顶点在块体内生成四面体单元, 完成缓倾斜矿柱 BBM 模型的参数化构建。

3) 结合矿体中节理分布的实测结果, 插入 DFN 节理组, 完成 BBM-DFN 缓倾斜矿柱模型的构建, 其部分参数化建模电池组如图 2 所示。

1.2 FLAC3D-3DEC 耦合模拟方法

耦合模拟方法为类似于房柱式采场中的铝土矿柱的承载试验, 涉及到不同的材料类型、行为和条件相互作用的岩土工程问题提供了强大的分析工具^[30]。FLAC^{3D}(有限差分法)与 3DEC(离散元方法)耦合的原理是识别耦合接触面处的网格点与区域面, 将节点的速度从 FLAC^{3D} 传递到 3DEC, 将节点的力从 3DEC 递到 FLAC^{3D}, 进而实现耦合计算。选择 FLAC^{3D}-3DEC 耦合模拟方法的原因包括:

1) FLAC^{3D} 和 3DEC 的耦合能够更准确地模拟涉

及连续行为和离散行为的工程场景。3DEC 主要对具有节理、块体和界面等不连续性的离散系统进行模拟, 适合表示岩体、裂隙介质以及结构和颗粒材料之间的相互作用; 而 FLAC3D 有效地模拟连续介质力学问题, 包括应力应变分析、变形等。这种耦合允许对具有连续和离散元的系统进行分析, 从而提供更全面的模拟结果。

2) 笔者主要研究数值模拟和机器学习相结合的缓倾斜矿柱强度预测方法, 需要 200 组数值计算结果作为数据集, 通过在 2 个软件之间分配计算负载, 提高模拟效率。

以研究缓倾斜铝土矿柱为例, 利用 3DEC 模拟矿柱, 对于矿柱的顶、底板岩层均采用 FLAC^{3D} 进行模拟分析, 在缓倾斜矿柱与顶、底板的 2 个接触面处耦合, 如图 3 所示。

1.3 矿柱强度预测机器学习模型

课题组前期研究已揭示 SVM 算法在预测铝土矿柱强度方面表现最佳, 因此笔者仍选用 SVM 作为缓倾斜矿柱强度模型。同时, 选用新兴的极限学习机 (ELM) 和轻量梯度提升机 (LightGBM) 来预测缓倾斜矿柱强度作为对比。相比传统的 BP 神经网络和 RF 算法, ELM 和 LightGBM 在神经网络和集成学习技术上表现更为成熟。旨在探究 BP 神经网络与 RF 算法的局限性, 或是否这 2 种机器学习技术不适用于铝土矿柱强度预测的回归类问题。

1.3.1 支持向量机 (SVM)

对于缓倾斜矿柱强度预测的回归类问题, SVM 算法的目标是寻找 1 个最优函数, 使得算法预测值与期望值之间的误差最小化。通过映射函数与核函数, 实现空间维度的转换与复杂问题的简单化处理。在解决小样本量、高维度和非线性关系上具有独特优势^[31]。

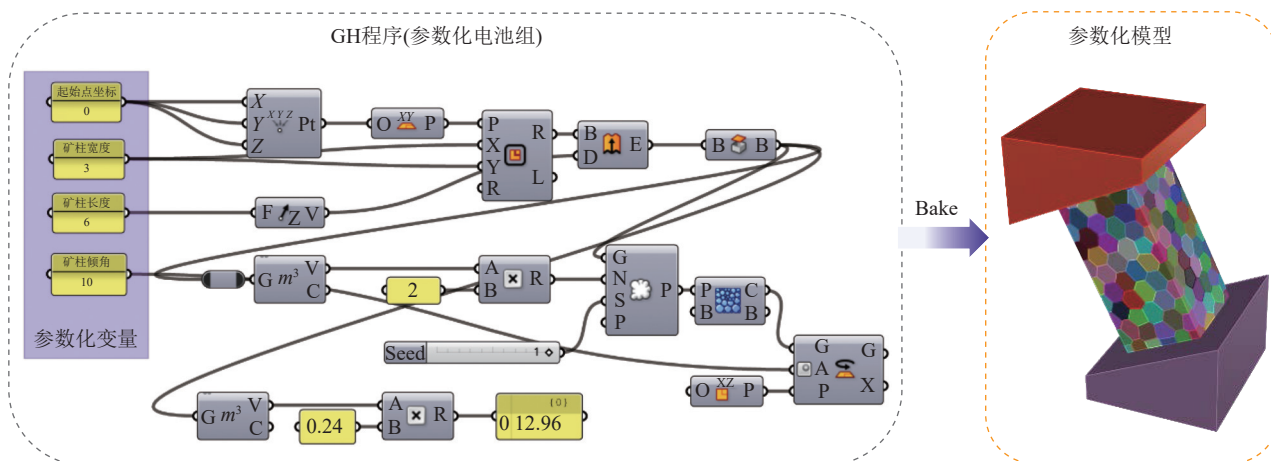


图2 参数化建模

Fig.2 Parametric modelling

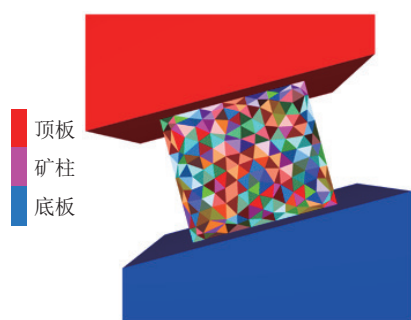


图3 耦合模拟方法

Fig.3 Coupled simulation methods

SVM 的线性回归的拟合函数如下:

$$f(x) = w^T y(x) + b \quad (1)$$

式中: w 为最优超平面的权值; $y(x)$ 为核函数; b 为阈值常数。

1.3.2 极限学习机 (ELM)

传统的前馈神经网络算法 (如 BP 神经网络), 存在训练速度慢、易陷入局部最优值和对学习率参数取值较为敏感等局限性。而 ELM 作为当前热门的单隐含层前馈神经网络, 具有训练参数少、学习速度快、泛化能力强的优点。与传统 BP 神经网络相比, ELM 的学习效率高于前者 10 倍以上, 且对于回归类问题的解决, ELM 算法表现更为优越^[32]。ELM 的神经网络结构如图 4 所示。

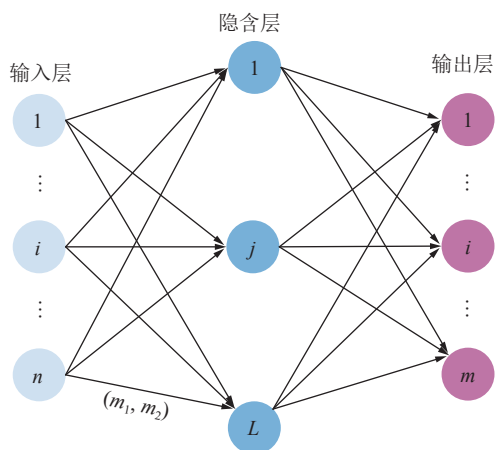


图4 ELM 模型框架

Fig.4 ELM modelling framework

由图 4 可知: 其框架由特征值映射的输入层, 隐含层以及矿柱强度作为的输出层, 3 层之间相互连接, 随机生成连接权重 m_1 及阈值 m_2 , 且在训练过程中无需调整, 只需要改变隐含层神经元个数, 训练参数较少, 易于快速训练并得到高精度的模型。

1.3.3 轻量梯度提升机 (LightGBM)

与 RF 算法相似, 梯度提升决策树 (GBDT) 也是基于决策树的一种集成学习算法, 对于回归类问题,

决策树采用二叉回归树形式。提升是一种热门的机器学习技术, 在训练过程中不断生成弱学习器, 并加权重累加到总模型中, 通过提升的方式得到最终模型。

LightGBM 算法是机器学习集成学习算法的进阶版, 基于 GBDT 算法的模型框架, 采用单边梯度采样、Level-wise 生长方式、互斥特征捆绑和直方图算法等方法, 以提高算法的效率和准确度^[33]。LightGBM 算法的模型框架如图 5 所示。

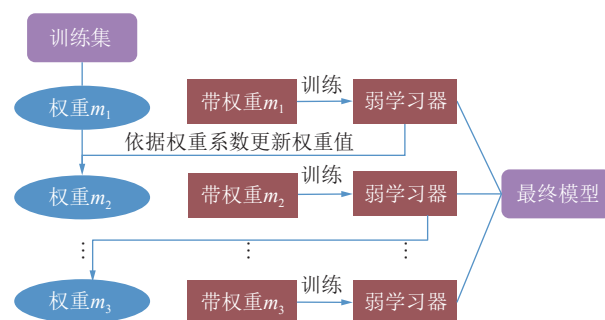


图5 LightGBM 训练过程

Fig.5 LightGBM training process

2 缓倾斜矿柱强度预测数据集建立

2.1 BBM-DFN 缓倾斜矿柱参数化建模

针对缓倾斜铝土矿柱, 研究其倾角、宽高比应当结合矿山实际情况。将倾角范围设置在 $5^\circ \sim 30^\circ$ 之间, 以 5° 倾角为间隔, 对同一尺寸矿柱模型设置 6 组不同倾角试验进行分类研究, 缓倾斜矿柱模拟试验中参数设计思路为

1) 铝土矿层厚度与现场实测的矿柱宽度区间, 设置矿柱宽、高度范围为 $2 \sim 7$ m。

2) 设置 15 个矿柱宽度, 分别为: 2.0、2.5、2.8、3.0、3.5、3.8、4.0、4.5、4.8、5.0、5.5、5.8、6.0、6.5、7.0, 设置 9 个宽度值, 分别为 2.0、2.5、2.8、3.0、3.5、4.0、4.8、5.0、6.0; 在数组 (1,2,3,4,5) 中选取 15 个随机值, 该值为每个矿柱宽度对应的高度组数, 在高度的数组中随机选取上述随机数量对应的高度值。然后, 按照倾角间隔 5° 进行宽高组合, 生成双重随机的 200 组宽高比符合 $0.5 \sim 3.0$ 的参数化数值模型。

为控制块度和节理因素对尺寸效应的影响, 在矿柱内以 0.6 m 为边长, 生成 Voronoi 中心点分布, 统一密度划分 Voronoi 块体, 然后以 Voronoi 块体中心点为顶点在块体内生成四面体, 完成缓倾斜矿柱 BBM 模型参数化构建。最后, 结合三维离散元 3DEC 中的 DFN 模块进一步剖分矿柱结构, 从而建立能准确反映节理裂隙分布特征的离散裂隙网络结构模型, 如图 6 所示。

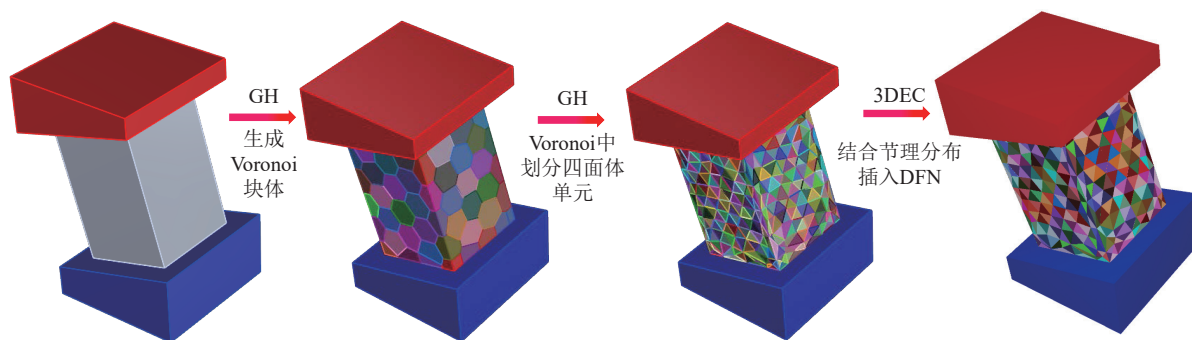


图 6 缓倾斜矿柱模型

Fig.6 Gently inclined pillar modelling

利用缓倾斜矿柱模型参数化建模方法,以 $3\text{ m} \times 3\text{ m} \times 4\text{ m}$ 的矿柱模型为例,展示 BBM-DFN 矿柱模型

结构,模型中共包含 218 个 Voronoi 块体、11 412 个四面体、23 个 DFN 单元,具体如图 7 所示。

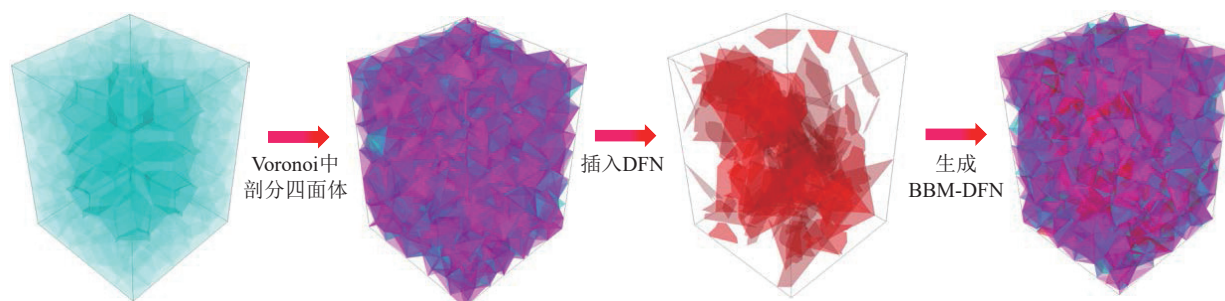


图 7 BBM-DFN 矿柱模型

Fig.7 BBM-DFN pillar model

2.2 数据集建立

参数化建立了 200 组 BBM-DFN 缓倾斜矿柱模型。为减少模拟过程中缓倾斜矿柱顶底板与矿柱的接触面对其承载特性试验的影响,利用 3DEC 和 FLAC3D 程序在接触面进行耦合计算,其原理是识别耦合接触面处 3DEC 的网格点和 FLAC3D 的区域面,通过力和速度在耦合面节点之间的传递,可以更好地模拟缓倾斜矿柱的渐进式破坏过程,研究缓倾斜矿柱的承载特性与破坏特征,并将数值计算结果作为机器学习矿柱强度预测数据集。

在矿柱模型力学参数的标定试验中,将矿柱和顶底板均设置为弹性体,节理单元接触选择摩尔—库伦模型,参数标定方法参照文献[27, 34]。顶底板弹性模量设置为 64×10^{20} GPa,铝土矿力学参数的标定过程如下:

建立标准尺寸的单轴压缩和巴西劈裂试验数值模型,模型与边界条件设置如图 8 所示,上、下板进行旋转约束,采用位移加载的方式对上下板施加 1 mm/s 速度,编制自动监测 FISH 程序获取模拟试验的应力—应变曲线。

参照文献[35]中铝土矿力学参数试验结果,采用

试错法标定铝土矿的力学参数,标定试验监测得到的单轴压缩和巴西劈裂应力—应变曲线如图 9—图 10 所示。

标定结果与试验结果误差分析见表 1。由应力—应变曲线与误差分析可知:标定试验结果与实验室试验结果吻合度较好,说明缓倾斜矿柱强度准则、本构模型和力学参数选取具有合理性。

标定试验所得到的岩块与节理力学参数见表 2。

参考文献[36, 37]通过实测获得某铝土矿的裂隙产状、内部填充物、节理长度与间距等数据,并总结岩

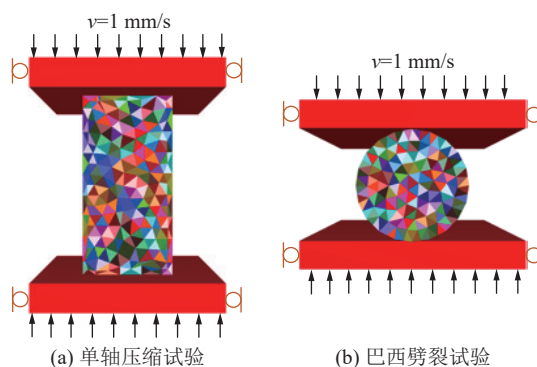


图 8 试件边界条件和加载方式

Fig.8 Boundary conditions and loading methods for specimen

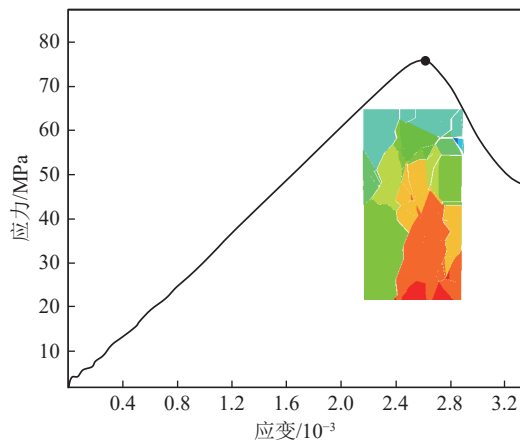


图9 单轴压缩试验应力-应变曲线与峰后位移云图
Fig.9 Uniaxial compression test stress-strain curves and post-peak displacement clouds

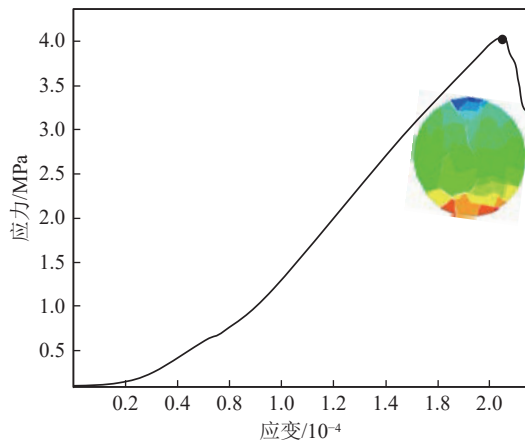


图10 巴西劈裂试验应力-应变曲线与峰后位移云图
Fig.10 Brazilian splitting test stress-strain curves and post-peak displacement clouds

表1 误差分析
Table 1 Error analysis

参数	标定结果	试验结果	误差/%
抗压强度/MPa	75.31	73.75	2.12
弹性模量/GPa	25.76	24.65	4.5
抗拉强度/MPa	4.18	4.32	3.2

表2 矿柱力学参数标定
Table 2 Calibration of mechanical parameters of pillar

节理参数	数值	块体参数	数值
节理法向刚度/GPa	500	容重/($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	27
节理剪切刚度/GPa	80	弹性模量/GPa	64
节理黏聚力/MPa	10.2	泊松比	0.22
节理内摩擦角/(°)	25	—	—
节理抗拉强度/MPa	7.6	—	—

体裂隙分布特征,如图11所示。

BBM 矿柱模型中,DFN 圆盘分布特征依据上述某铝土矿裂隙分布特征,见表3。

矿柱模型的边界条件的设定为:矿柱顶、底板四周采用法向约束,采用两端双向加载方式,上、下两端同时以 2 mm/s 的速度加载。模型与边界条件设定如图12所示。

监测缓倾斜矿柱承载过程中的轴向应力和轴向应变行为。应力-应变监测函数的结束判定条件为达到峰值应力后降低了 20%,此时矿柱的承载能力达到极限,裂隙已贯通,矿柱处于失稳状态。

200 组缓倾斜矿柱承载特性试验数据分布如图13所示,图13a—图13c表示每个矿柱影响因子与强度之间的分布关系,其中 w 为矿柱宽度, m ; h 为矿柱高度, m ; θ 为矿体倾角, (°)。

2.3 缓倾斜矿柱承载特性与破坏特征分析

为探究缓倾斜矿柱的变形与强度特性,以 $2.5 \text{ m} \times 2.5 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ (宽高比 0.833 : 1) 为代表的“细长型”矿柱和以 $3 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 2.5 \text{ m}$ (宽高比 1.2 : 1)、 $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2.5 \text{ m}$ (宽高比 1.6 : 1) 为代表的“矮胖型”矿柱承载试验为例,如图14所示,从缓倾斜矿柱应力-应变曲线分析其变形与强度特性,揭示倾角效应与尺寸效应对缓倾斜矿柱变形与强度特性的影响特征。

由图14—图15可知:缓倾斜矿柱的峰值强度受倾角效应的影响,随着矿体倾角增加,峰值强度逐渐下降。当 $w/h < 1$ 时,倾角范围在 $5^\circ \sim 20^\circ$ 之间,其应力-应变曲线发展趋势相近,且峰值强度下降相对缓慢;当倾角范围在 $20^\circ \sim 30^\circ$ 之间时,其应力-应变曲线发展趋势相近,伴随着倾角的增加缓倾斜矿柱的峰值强度发生陡降;当 $w/h > 1$ 时,倾角范围在 $5^\circ \sim 30^\circ$ 之间近似呈线性规律下降,整体发展趋势相对平缓。

对于缓倾斜矿柱而言,其峰值强度除受倾角效应影响之外,尺寸效应影响机制也较为显著,伴随着宽高比值的增加,矿柱峰值强度显著上升。

2.4 缓倾斜矿柱影响因子敏感性分析

为进一步分析缓倾斜矿柱强度与影响因子(宽、高、矿体倾角)之间的内在联系,利用皮尔逊相关系数矩阵绘制热力图如图16所示,对缓倾斜矿柱强度影响因子进行敏感性分析。

由图16可知,将数据集按照矿柱宽高比值分组进行参数敏感性分析,当 $w/h > 1$ 时,缓倾斜矿柱影响因子敏感性的主次顺序为:宽度>倾角>高度,其影响比重的比值为 1.196 : 1 : 0.857,影响因子敏感性的主次顺序与文献[38-39]等得出的结论一致;当 $w/h < 1$ 时,缓倾斜矿柱影响因子敏感性的主次顺序为:倾角>高度>宽度,其影响比重的比值为 2.77 : 1 :

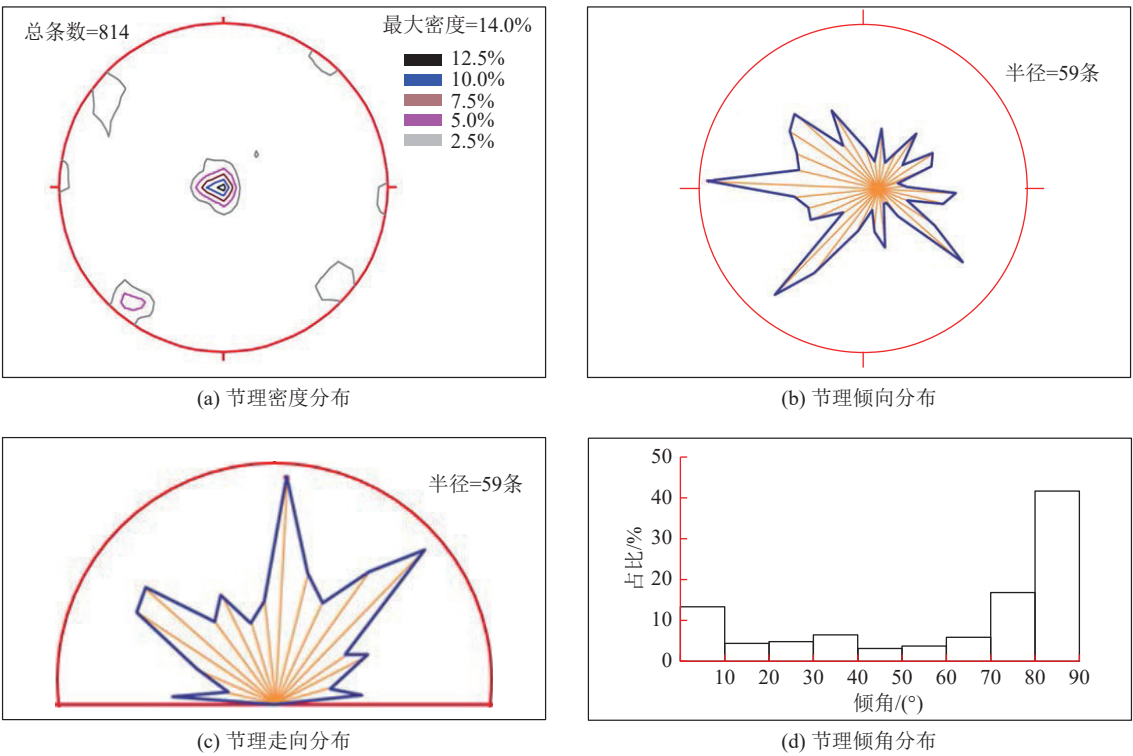


图 11 裂隙调查统计^[36-37]
Fig.11 Statistical map of fracture survey^[36-37]

表 3 离散裂隙网络特征参数

Table 3 Discrete fracture network feature parameter

节理产状	倾角/(°)	间距/m	倾向/(°)	密度/(条·m ⁻³)	优势节理走向/(°)
以闭合型为主	50~90	0~2	220~230、270~280	0.24	0~10、40~50、300~310

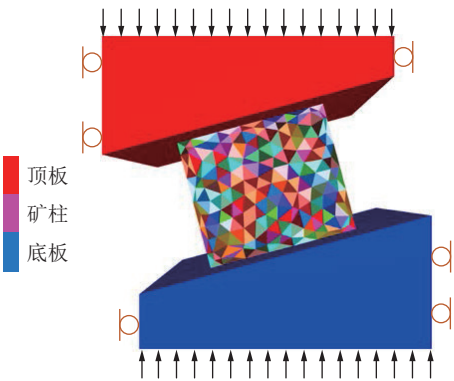


图 12 矿柱边界条件及加载方式

Fig.12 Boundary conditions and loading methods for pillar
0.677, 与考虑宽与高幂指数的经典矿柱强度理论公式所得出的结论相一致^[40]。因此, 将矿柱承载试验结果作为数据集供机器学习算法应用于缓倾斜矿柱强度预测具有可靠性, 进一步验证了缓倾斜矿柱强度准则、本构模型和力学参数选取的合理性。

3 缓倾斜矿柱强度预测模型

从 200 组缓倾斜矿柱数据集中选取矿柱尺寸参

数宽、高以及矿体倾角作为机器学习算法的输入特征值, 将矿柱强度作为预测输出值, 分别构建 SVM、ELM 和 LightGBM 3 种缓倾斜矿柱强度预测模型。机器学习流程如下^[41]:

1) 数据集预处理。在建模之前, 采用数据归一化处理将特征值全部缩放到[0,1], 从而避免数量级差异带来的预测偏差。

2) 划分数据集。采用 4-折交叉验证, 将数据集随机拆分成 4 个不同的子集, 其中 3 个子集作为训练集, 另一个子集作为测试集。

3) 利用 python 语言实现算法的编写, 分别加载训练集对模型进行训练, 随机组合测试集验证模型性能。

3.1 SVM

加载训练集建立 SVM 模型, 对于测试集, 矿柱强度的预测值与数值模拟结果拟合效果以及两者之间拟合程度的决定系数如图 17 所示, 两者之间整体拟合效果较好, 对于部分数据的预测存在偏差, 其决定系数 (R-Square, R²)R² 值为 0.921。

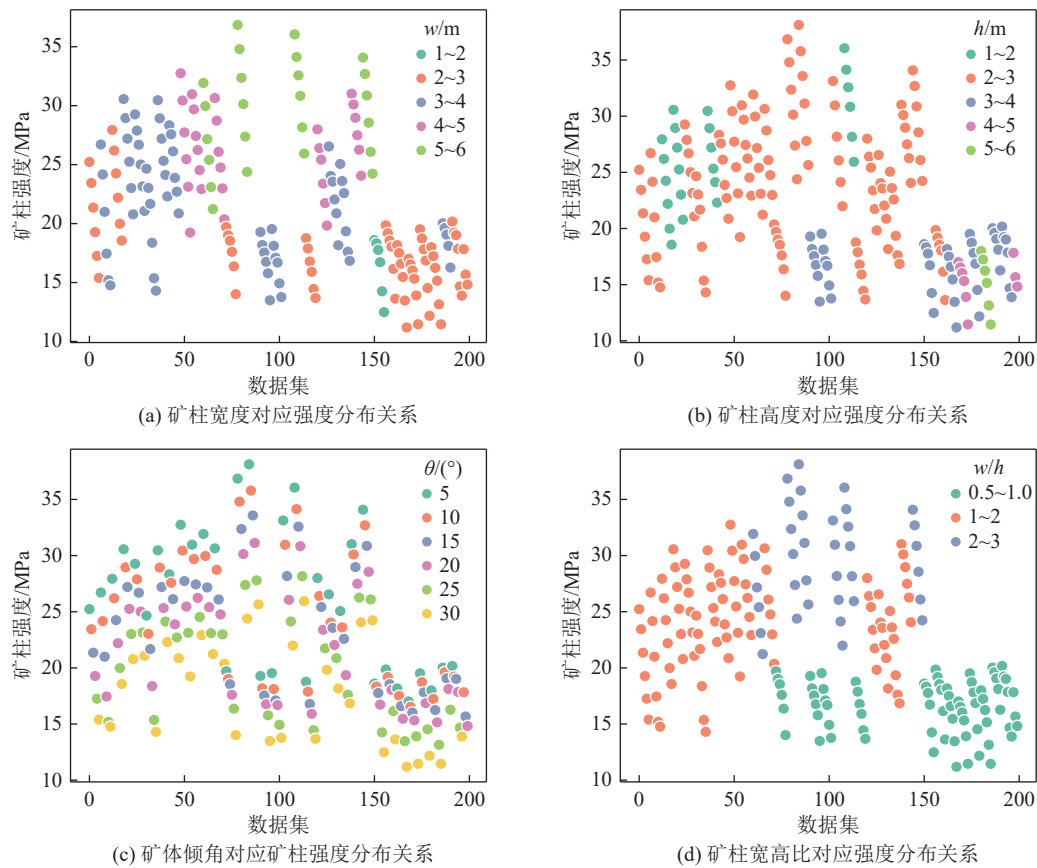


图 13 数据分布

Fig.13 Data distribution

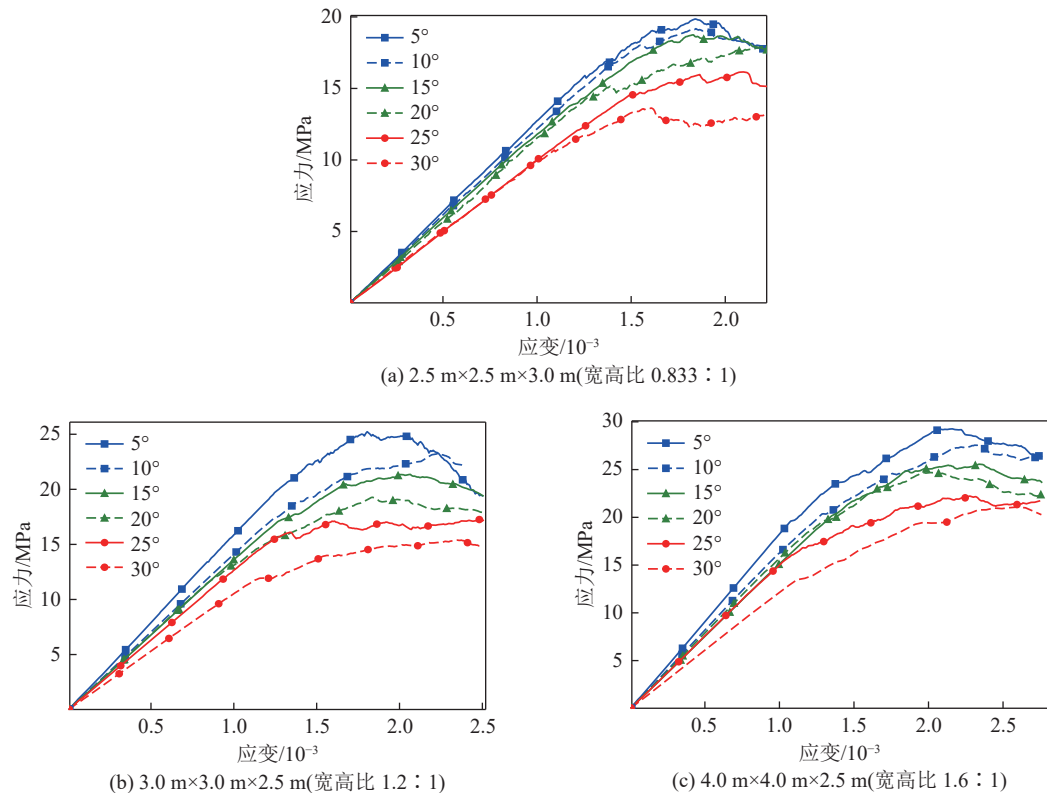


图 14 缓倾斜矿柱应力-应变曲线

Fig.14 Stress-strain curves of inclined pillar

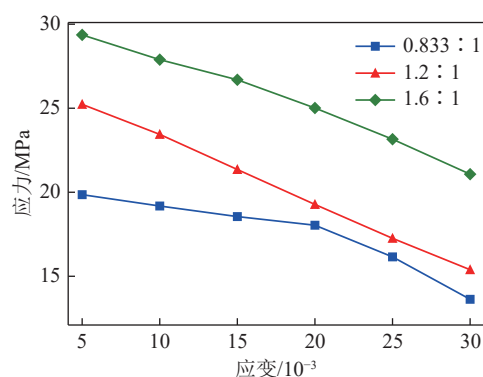


图 15 不同宽高比缓倾斜矿柱倾角效应影响特征

Fig.15 Mechanisms affecting dip effect of different width-to-height ratio gently inclined pillar

3.2 ELM

ELM 模型完成训练之后,对于测试集,矿柱强度的预测值与数值模拟结果拟合效果以及二者之间拟合程度的决定系数如图 18 所示。由图 18 可知:二者之间拟合效果不如 SVM,其 R^2 值为 0.911。

3.3 LightGBM

LightGBM 模型完成训练之后,对于测试集,矿柱强度的预测值与数值模拟结果拟合效果以及二者之间拟合程度的决定系数如图 19 所示。由图 19 可知,二者之间拟合效果欠缺,其 R^2 值为 0.905。

3.4 SVM、ELM、LightGBM 模型评价

采用判定系数 (R^2)、可解释方差 (R_{EVS})、平均绝对误差 (R_{MAE}) 和均方误差 (R_{MSE}) 等回归类评价指标^[41]分别对 3 种机器学习模型进行评价,见表 4。

由表 4 可知:在缓倾斜矿柱强度预测性能方面,4 种模型评价指标可以证明模型预测性能关系为: $SVM > ELM > LightGBM$, 因此, SVM 算法预测性能

最佳。本文中 200 组缓倾斜矿柱强度数据集,归属于小样本数据集,符合 SVM 在解决小样本与复杂非线性问题处理上的优势,而 ELM 与 LightGBM 预测性能相对偏差,与水平铝土矿柱结论一致,因此,神经网络与集成学习 2 种机器学习技术并不适用于小样本的硬岩矿柱强度的预测,这也符合文献[26]总结出样本数量是影响机器学习模型性能的重要因素,神经网络与集成学习技术更适用于中等与大样本数据的处理。

4 进化算法优化支持向量机

SVM 模型在缓倾斜矿柱强度预测中的性能仍存在偏差。为进一步改进 SVM 模型的预测能力,引入 2 种机器学习优化算法,并结合使用,构建一种适用于缓倾斜矿柱强度预测的改进模型。

4.1 遗传编程 (GP)

GP 是一种优化算法,继承了遗传算法的基本思想,对染色体的结构和变异方式作出了改进。GP 算法在非线性函数逼近与机器学习算法优化等问题的处理方面性能优异^[42]。

GP 算法由回归器、分类器和转换器 3 部分组成,分别用于回归预测、分类算法以及特征转换。gplearn 是一个新兴的适用于 GP 算法的成熟 Python 库,基于 gplearn 的符号回归是为数不多的可解释型机器学习算法,并且可以实现特征的衍生。笔者利用 gplearn 库编写 GP 算法,对 SVM 的特征值进行优化,以提高算法的预测性能,并且利用 GP 算法的可解释性拟合出缓倾斜矿柱强度公式。

GP 模型参数标定:每代程序数 2 000,进化代数

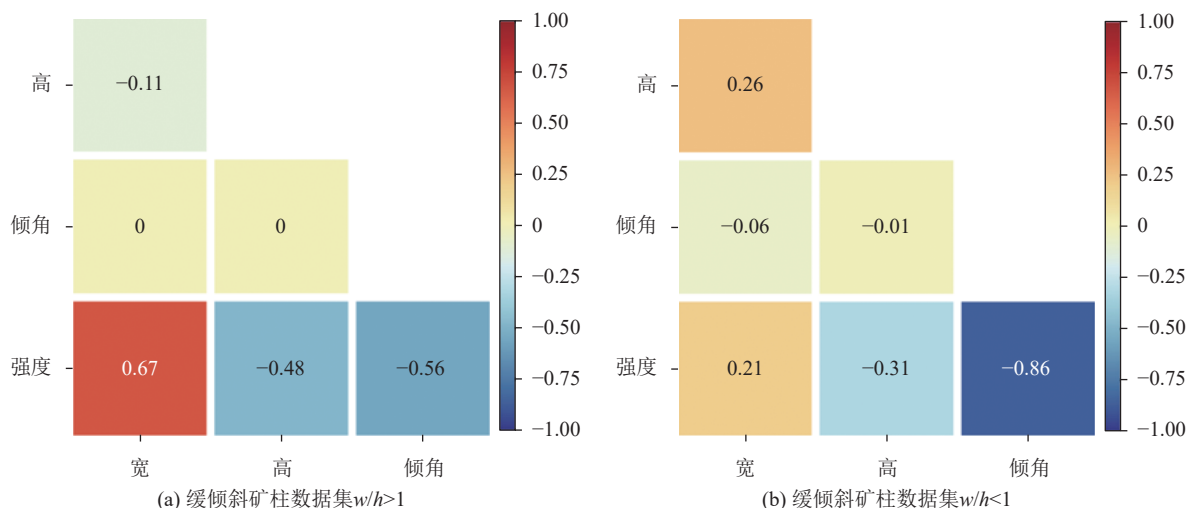


图 16 缓倾斜矿柱影响因子热力图

Fig.16 Thermal map of impacting factors of inclined pillar

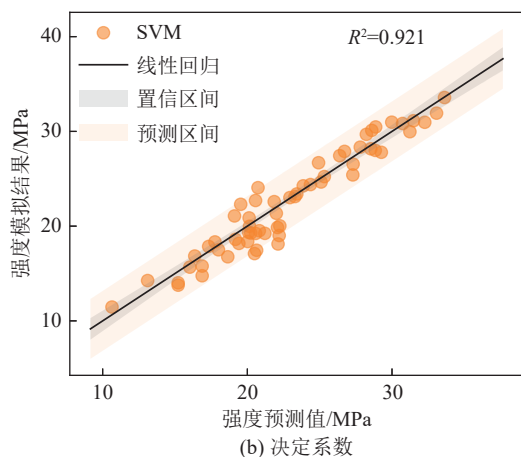
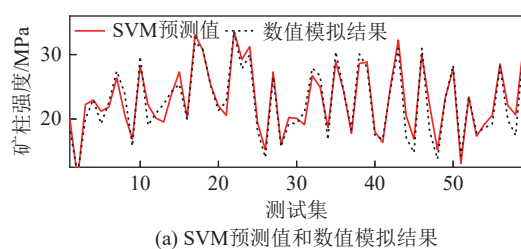


图 17 SVM 缓倾斜矿柱强度预测模型

Fig.17 SVM strength prediction model of gently inclined pillar

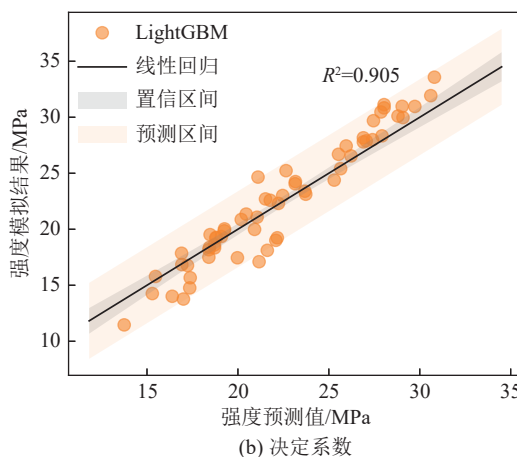
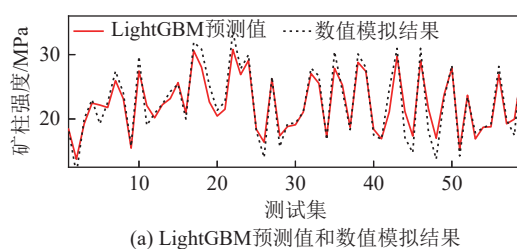


图 19 LightGBM 缓倾斜矿柱强度预测模型

Fig.19 LightGBM strength prediction model of gently inclined pillar

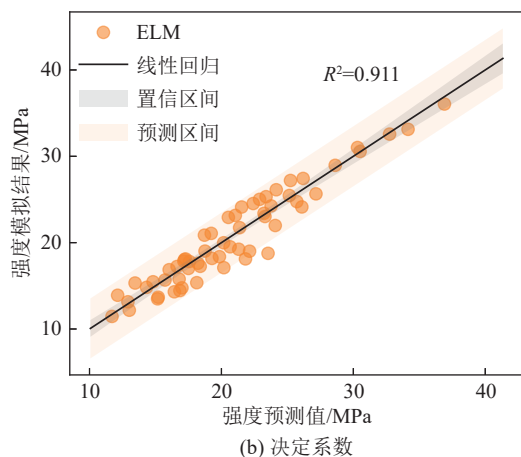
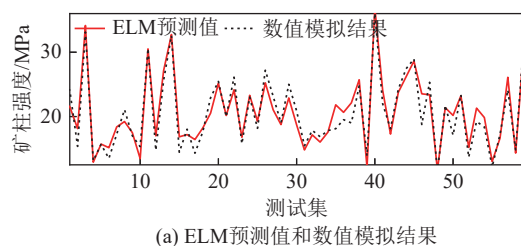


图 18 ELM 缓倾斜矿柱强度预测模型

Fig.18 ELM strength prediction model of gently inclined pillar

取值 20 次、每代择优数量取 10, 惩罚权重 0.000 5, 交叉变异概率 0.9。利用 GP 中转换器部分对 SVM 模型特征值进行了优化, 利用新特征再次训练 SVM 模型, 矿柱强度的预测值与数值模拟结果拟合效果以及二者之间拟合程度的决定系数如图 20 所示, 二者拟

表 4 SVM、ELM、LightGBM 模型评价

Table 4 SVM、ELM、LightGBM modelling evaluation

指标	R^2	R_{EVS}	R_{MAE}	R_{MSE}
SVM	0.921	0.926	1.225	2.367
ELM	0.911	0.911	1.347	2.806
LightGBM	0.905	0.906	1.314	2.845

合效果得到了明显提升, 其决定系数 R^2 为 0.959, 相比 SVM 提升了 3.8%。

4.2 改进的量子粒子群优化算法 (IQPSO)

GP 算法优化的本质是对 SVM 模型特征的衍生扩展, 新特征使模型性能得到优化。为进一步提高 SVM 模型性能, 除了特征值之外, 还可以对超参数进行优化。将 IQPSO 和 SVM 相结合, 其本质是利用粒子群算法对 SVM 的超参数进行优化, 借助其全局寻优能力实现超参数的选取^[43]。

IQPSO 算法参数标定: 种群规模为 300, 迭代次数 200、惯性权重区间为 [0.4, 0.9], 权重衰减系数取值 0.9, 矿柱强度的预测值与数值模拟结果拟合效果以及二者之间拟合程度决定系数如图 21 所示, 二者拟合效果相对 GP-SVM 进一步改善, 其决定系数 R^2 为 0.976, 相比 SVM 提升了 5.5%。

采用 R^2 、 R_{EVS} 、 R_{MAE} 、 R_{MSE} 回归类评价指标 2 种优化后的模型指标值见表 5。

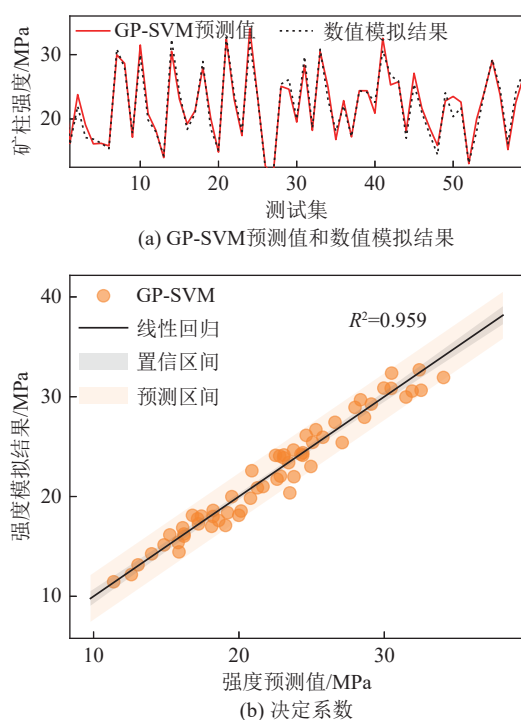


图20 GP-SVM 缓倾斜矿柱强度预测模型

Fig.20 GP-SVM strength prediction model of inclined pillar

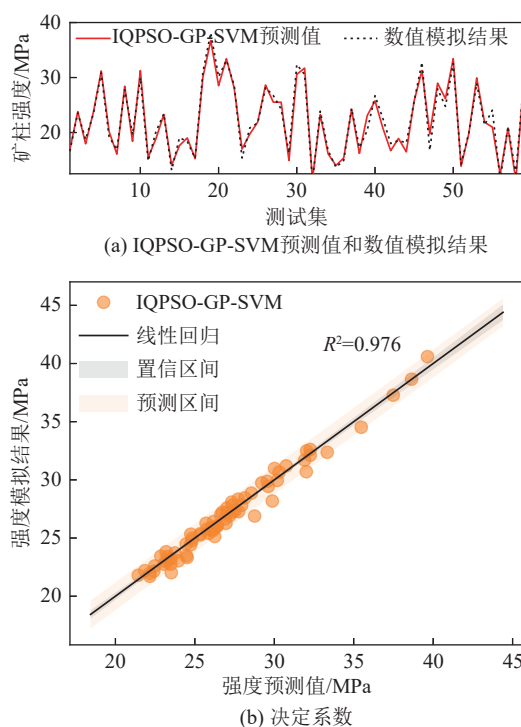


图21 IQPSO-GP-SVM 矿柱强度预测模型

Fig.21 IQPSO-GP-SVM strength prediction model of pillar

由表5可知:在缓倾斜矿柱强度预测性能方面,4种模型评价指标表明,通过GP对SVM特征的优化以及后续IQPSO对SVM超参数的优化,均使得模型性能得到明显提升。因此,结合IQPSO-GP-SVM算法进行缓倾斜矿柱强度的预测具有可行性,构建了一

表5 SVM、GP-SVM、IQPSO-GP-SVM 模型评价

Table 5 SVM、GP-SVM、IQPSO-GP-SVM modelling

evaluation				
指标	R^2	R_{EVS}	R_{MAE}	R_{MSE}
SVM	0.921	0.926	1.225	2.367
GP-SVM	0.959	0.959	0.908	1.286
IQPSO-GP-SVM	0.976	0.977	0.465	0.862

种缓倾斜矿柱强度预测模型,并建立了矿柱强度与其影响因子之间的非线性映射关系。

5 基于符号回归的缓倾斜矿柱强度表达式

符号回归是一种可解释的机器学习方法。其优点在于无需依赖先验知识来为非线性系统建立符号模型,而是使用遗传优化算法与进化策略来进行搜索和优化,通过搜索和组合基本数学运算符和函数,自动构建出模型的数学表达式^[44]。

IQPSO-GP-SVM 矿柱强度预测模型是复杂、高维度的非线性模型。可以借助 GP 算法来获取一个能够完全反映此非线性系统动态特性的符号表达式,帮助发掘数据之间的相互关系,用于预测新样本、回归分析、模型解释等。

基于 gplearn 库编写 GP 算法,利用回归器部分对符号库进行扩展,除基本的数学运算符号外,加入三角函数、绝对值、平方根等。然后,利用回归器自行组合函数与符号,将矿柱数据集分组进行符号回归构建出模型的数学表达式形式。

当 $w/h < 1$ 时,

$$S = \left(\frac{\cos(\sin \theta_1)}{0.049} - 3h_1 + 2w_1 \right) - \cos[\max(w_1, h_1)] \quad (2)$$

当 $w/h > 1$ 时,

$$S = \cos h_1 \left(2\sqrt{|w_1 - 0.912|} + \cos h_1 + y \right) \\ y = \cos h_1 \left| \frac{\sin(\sin w_1) + \cos \theta_1}{0.049} \right| \quad (3)$$

式中: w_1 、 h_1 、 θ_1 分别为 w 、 h 、 θ 经 $[0, 1]$ 归一化后处理的值。

GP 模型中缓倾斜矿柱强度的预测值与数值模拟结果拟合效果以及二者之间拟合程度决定系数如图22所示。

通过 GP 模型建立了最佳拟合式,模型性能的评价指标见表6。

由图22和表6可知:由 GP 模型建立的缓倾斜矿柱强度表达式的 R^2 值分别为 0.948 和 0.931,拟合效果较好,证明 GP 模型对铝土矿柱强度预测问题较为

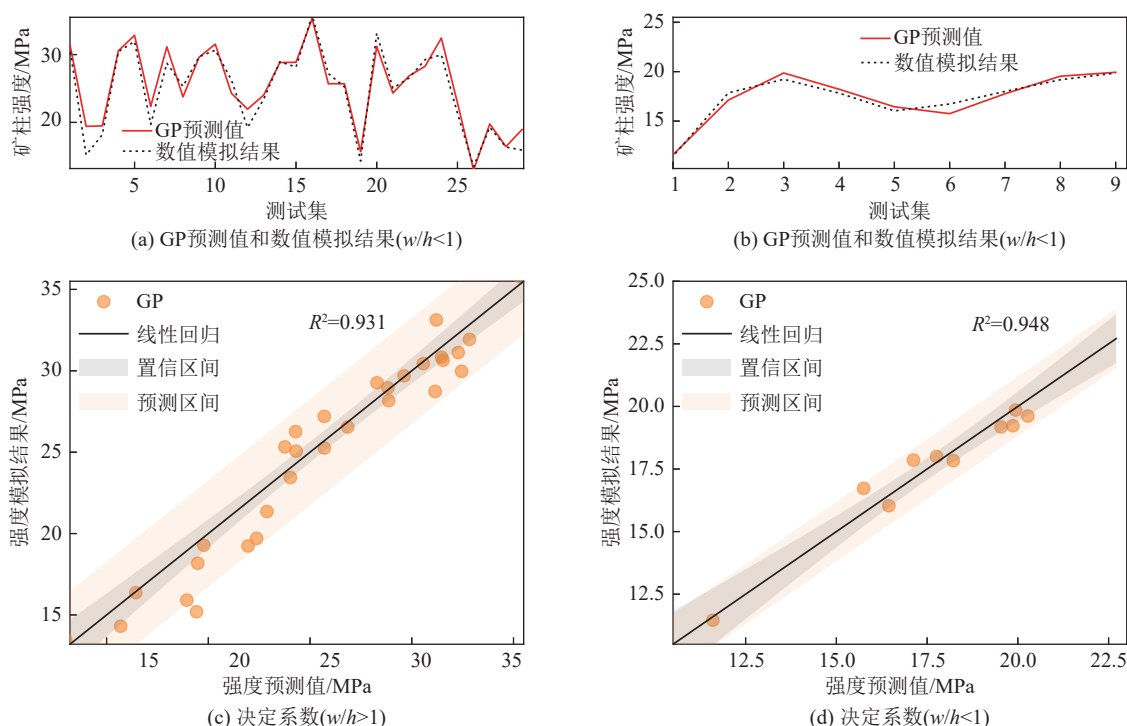


图 22 GP 模型预测性能

Fig.22 GP model prediction performance

表 6 GP 模型评价

Table 6 GP modelling evaluation

指标	R^2	R_{EVS}	R_{MAE}	R_{MSE}
GP($w/h < 1$)	0.948	0.949	0.462	0.286
GP($w/h > 1$)	0.931	0.940	1.264	2.617

适用。

6 讨 论

为进一步验证机器学习—数值模拟相结合的强度预测方法的可靠性,将基于 GP 的符号回归表达式 (2)、式 (3) 分别与 2 种经典矿柱强度理论对比分析:

JESSU^[18]公式

$$S = S_1(1 - 0.0077\theta) \quad (4)$$

DAS^[4]公式

$$S = S_1 \left[1 - \left[1 - (\cos \theta)^{2.4} (\sin \varphi)^{0.8} \right] \left(\frac{H}{w/h} \right)^{0.04} \right] \quad (5)$$

式 (4)、式 (5) 中水平矿柱强度公式选用文献[27]中修正后适用于水平铝土矿柱的 ESTERHUIZEN 公式。

$$S = 0.65\sigma_0 F \frac{w^{0.30}}{h^{0.59}} \quad (6)$$

针对水平铝土矿柱,课题组前期研究已揭示 F 值随宽高比值变化。当 $w/h < 1$ 时, F 取值为 0.8~1.0;

当 $1 < w/h < 6$ 时, F 取值为 0.6~0.8; 当 $w/h > 6$ 时, F 取值应小于 0.6。

将水平铝土矿柱强度式 (6) 带入上述 2 种经典的矿柱强度公式 (式 (4)、式 (5)) 中得出式 (7)、式 (8)。

$$S = 0.65\sigma_0 F \frac{w^{0.30}}{h^{0.59}} (1 - 0.0077\theta) \quad (7)$$

$$S = S_1 \left[1 - \left[1 - (\cos \theta)^{2.4} (\sin \varphi)^{0.8} \right] \left(\frac{H}{w/h} \right)^{0.04} \right] \quad (8)$$

$$S_1 = 0.65\sigma_0 F \frac{w^{0.30}}{h^{0.59}}$$

式中: σ_0 与 φ 的取值依据铝土矿力学参数的标定结果,埋深 H 为 200 m。选取缓倾斜铝土矿柱强度数据集部分数据,分别代入式 (7)、式 (8) 与 GP 符号回归表达式后,强度值对比见表 7,其强度误差分析如图 23 所示。

由表 7 与图 22 可知,当 $w/h > 1$ 时, JESSU 公式强度值与基于 GP 的符号回归表达式预测值相近。当 $w/h < 1$ 时, JESSU 公式强度计算值偏高。因此,利用 GP 符号回归表达式修正式 (6) 中 F 值,使其适用于缓倾斜铝土矿柱强度计算。当 $w/h < 1$ 时, F 取值为 0.7~0.8 时,两者强度计算值相近; 当 $1 < w/h < 3$ 时, F 取值应为 0.6~0.7。且当矿柱宽高比一致时, F 取值随倾角增加而减小。

对于 DAS 公式,当 $w/h < 2$ 时, JESSU 公式强度

表 7 JESSU、Das 公式矿柱强度值与 GP 预测值对比

Table 7 Comparison of JESSU, Das formula pillar strength values with GP predictions

编号	w/m	h/m	$\theta/(^{\circ})$	GP预测值/MPa	JESSU公式值/MPa	JESSU误差/%	DAS公式值/MPa	DAS误差/%
1	2.5	3.0	15	18.60	21.06	11.7	18.95	1.8
2	2.5	3.0	25	15.74	19.08	17.5	15.21	3.4
3	3.0	4.0	15	17.63	19.51	9.6	16.84	4.7
4	3.0	4.0	25	14.97	17.63	15.1	13.90	7.7
5	3.0	2.0	15	23.31	25.43	8.3	21.87	6.6
6	3.0	2.0	25	19.14	20.90	8.4	17.69	8.2
7	5.0	2.5	15	26.92	25.98	3.6	24.79	8.5
8	5.0	2.5	25	23.66	22.03	7.4	21.91	8.0
9	7.0	2.5	15	34.28	32.85	4.4	29.50	16.2
10	7.0	2.5	25	29.73	28.12	5.7	25.30	17.5

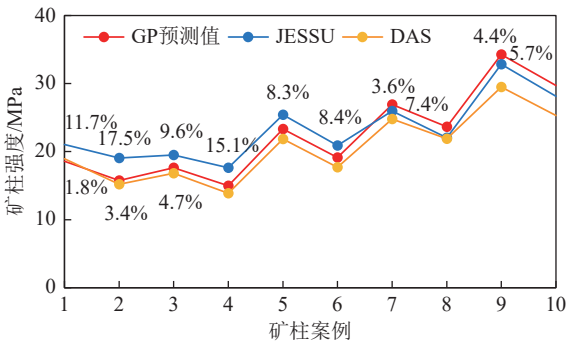


图 23 误差分析

Fig.23 Error analysis

值与 GP 预测值相近;当 $w/h > 3$ 时,二者误差较大。因此,DAS 公式适用于计算宽高比值小于 2 的缓倾斜铝土矿柱。

经典理论矿柱强度理论与 GP 预测值对比结果表明,可以应用 GP 模型评估矿柱强度,DAS 公式适用于计算宽高比小于 2 的缓倾斜铝土矿柱,并修正了 ESTERHUIZEN 公式的 F 值,使其适用于缓倾斜铝土矿柱强度预测。因此,采用参数化建模、数值模拟和机器学习相结合的方法,建立缓倾斜铝土矿柱强度模型预测其强度值是可行的。除铝土矿柱之外,此矿柱强度预测方法具有普适性,拓新了倾斜矿柱强度预测的思路。

7 结 论

1) 矿柱承载试验模拟结果表明,倾角与尺寸效应对峰值强度影响较大。随着矿体倾角的增加,矿柱的强度值显著下降,不同宽高比的矿柱在受倾角影响时表现出不同的特征。当 $w/h < 1$ 时,倾角在 $5^{\circ} \sim 20^{\circ}$ 范围内,矿柱强度的下降相对平缓;当倾角超过 20° 时,强度值发生陡降;对于 $w/h > 1$ 的矿柱,倾角从 $5^{\circ} \sim$

30° 范围内的强度呈线性下降。与水平矿柱保持一致,缓倾斜矿柱的强度受宽高比值影响也较大,伴随着矿柱宽高比增加其强度显著提升。

2) 由矿柱影响因子敏感性分析可得,当 $w/h < 1$ 时,缓倾斜矿柱强度影响因子敏感性主次顺序为:倾角 $>$ 高度 $>$ 宽度;当 $w/h > 1$ 时,其影响因子敏感性主次顺序为:宽度 $>$ 倾角 $>$ 高度。此结果验证了以数值模拟结果作为矿柱强度数据集供机器学习模型预测矿柱强度的可靠性。

3) 模型评价指标表明,SVM 模型为最佳矿柱强度预测模型($R^2=0.921$; $R_{EVS}=0.926$; $R_{MAE}=1.225$; $R_{MSE}=2.367$)。通过结合 GP 与 IQPSO 2 种优化算法对 SVM 的特征与超参数进行优化,使得 SVM 模型性能显著提升($R^2=0.976$; $R_{EVS}=0.977$; $R_{MAE}=0.465$; $R_{MSE}=0.862$)。优化后的模型拟合效果较好,可有效用于缓倾斜矿柱强度预测。

(4) 利用 GP 的符号回归方法建立了缓倾斜铝土矿柱强度表达式,通过模型评价指标及经典的矿柱强度理论对比验证了此方法的可靠性,并修正了 ESTERHUIZEN 公式的 F 值使其适用于缓倾斜铝土矿柱强度预测。数值模拟-机器学习矿柱强度预测方法具有普适性,拓新了倾斜矿柱强度预测的思路。

参考文献(References):

[1] PARISEAU W G. Shear stability of mine pillars in dipping seams [C]//ARMA US Rock Mechanics/Geomechanics Symposium. ARMA, 1982.

[2] VUTUKURI, V S, FOROUGH, M H. Estimating pillar stresses in inclined coal seams[C]// Proceedings of the 96 International Symposium on Mining Science and Technology, Netherlands: A. A. Balkema, Rotterdam (Netherlands), 1996.

[3] DAS A J, MANDAL P K, BHATTACHARJEE R, et al. Evaluation

- of stability of underground workings for exploitation of an inclined coal seam by the ubiquitous joint model[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2017, 93: 101–114.
- [4] DAS A J, MANDAL P K, PAUL P S, et al. Assessment of the strength of inclined coal pillars through numerical modelling based on the ubiquitous joint model[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2019, 52(10): 3691–3717.
- [5] 吉兴旺. 煤层残采区下铝土矿开采覆岩变形协调关系研究[D]. 太原: 太原理工大学, 2023.
- JI Xingwang. Study on Deformation coordination relationship of overlying strata in bauxite mining under residual mining area of coal seam[D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2023.
- [6] 李凤浩, 霍彦萌. 山西铝土矿矿床成因及古地理环境分析[J]. *世界有色金属*, 2020(21): 95–96.
- LI Fenghao, HUO Yanmeng. Analysis on genesis and paleogeographic environment of bauxite deposit in Shanxi Province[J]. *World Nonferrous Metals*, 2020(21): 95–96.
- [7] 邓久帅, 姚伟, 林艳, 等. “三深”金属矿产资源开采利用的绿色化思考[J]. *绿色矿山*, 2023, 1(1): 186–192.
- DENG Jiushuai, YAO Wei, LIN Yan, et al. Thoughts on the greening of the mining and utilization of metal mineral resources in deep underground/sea/space[J]. *Journal of Mine*, 2023, 1(1): 186–192.
- [8] 冯国瑞, 白锦文, 马俊彪, 等. 残采区群柱遗煤资源绿色开采与地下空间开发技术挑战[J]. *绿色矿山*, 2023, 1(1): 91–100.
- FENG Guorui, BAI Jinwen, MA Junbiao, et al. Technical challenge of coal pillars resource green mining and underground space developing in the residual mining area[J]. *Journal of Green Mine*, 2023, 1(1): 91–100.
- [9] ZHANG C, ZHAO Y X, HAN P H, et al. Coal pillar failure analysis and instability evaluation methods: A short review and prospect[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2022, 138: 106344.
- [10] JAISWAL A, SHRIVASTVA B K. Numerical simulation of coal pillar strength[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2009, 46(4): 779–788.
- [11] MURALI MOHAN G, SHEOREY P R, KUSHWAHA A. Numerical estimation of pillar strength in coal mines[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2001, 38(8): 1185–1192.
- [12] MATHEY M, VAN DER MERWE J N. Critique of the South African squat coal pillar strength formula[J]. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 2016, 116(3): 291–299.
- [13] LUNDER P J, PAKALNIS R C. Determination of the strength of hard-rock mine pillars[J]. *CIM bulletin*, 1997, 90(1013): 51–55.
- [14] ESTERHUIZEN G S, DOLINAR D R, ELLENBERGER J L. Pillar strength in underground stone mines in the United States[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2011, 48(1): 42–50.
- [15] SALAMON M, WAGNER H. Practical experiences in the design of coal pillars[C]//Proceedings of the 21st International Conference of Safety in Mines Research Institutes, Sydney, Australia, CRC Press Sydney, 1985.
- [16] DAS A J, MANDAL P K, PAUL P S, et al. Generalised analytical models for the strength of the inclined as well as the flat coal pillars using Rock mass failure criterion[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2019, 52(10): 3921–3946.
- [17] KUMAR R, DAS A J, MANDAL P K, et al. Probabilistic stability analysis of failed and stable cases of coal pillars[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2021, 144: 104810.
- [18] JESSU K V, SPEARING A J S, SHARIFZADEH M. Laboratory and numerical investigation on strength performance of inclined pillars[J]. *Energies*, 2018, 11(11): 3229.
- [19] 罗斌玉, 叶义成, 曹中, 等. 基于 Mohr-Coulomb 准则的缓倾斜层状矿床矿柱强度估算及倾角效应[J]. *岩土力学*, 2019, 40(5): 1940–1946, 1956.
- LUO Binyu, YE Yicheng, CAO Zhong, et al. Estimation of pillar strength and effect of inclination under gently inclined layered deposits based on Mohr-Coulomb criterion[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, 40(5): 1940–1946, 1956.
- [20] 姜立春, 李金柱. 倾斜矿体采空区非对称顶板-矿柱结构体协同承载机理[J]. *中国有色金属学报*, 2024, 34(1): 329–343.
- JIANG Lichun, LI Jinzhu. Synergistic bearing mechanism of asymmetric roof-pillar structure body in goaf of inclined orebody[J]. *The Chinese Journal of Nonferrous Metals*, 2024, 34(1): 329–343.
- [21] DAS A J, PAUL P S, MANDAL P K, et al. Investigation of failure mechanism of inclined coal pillars: numerical modelling and tensorial statistical analysis with field validations[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2021, 54(6): 3263–3289.
- [22] MORTAZAVI A, HASSANI F P, SHABANI M. A numerical investigation of rock pillar failure mechanism in underground openings[J]. *Computers and Geotechnics*, 2009, 36(5): 691–697.
- [23] MEDHURST T P, BROWN E T. A study of the mechanical behaviour of coal for pillar design[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 1998, 35(8): 1087–1105.
- [24] MARK C. The evolution of intelligent coal pillar design: 1981–2006[C]//Proceedings of the 25th international conference on ground control in mining. Morgantown, WV: West Virginia University, 2006.
- [25] WU Z J, WU Y, WENG L, et al. Machine learning approach to predicting the macro-mechanical properties of rock from the meso-mechanical parameters[J]. *Computers and Geotechnics*, 2024, 166: 105933.
- [26] ZHU D F, YU B B, WANG D Y, et al. Fusion of finite element and machine learning methods to predict rock shear strength parameters[J]. *Journal of Geophysics and Engineering*, 2024, 21(4): 1183–1193.
- [27] 朱德福, 王德玉, 于彪彪. 基于离散元-机器学习的铝土矿矿柱强度预测方法[J]. *煤炭学报*, 2024, 49(7): 3038–3050.
- ZHU Defu, WANG Deyu, YU Biao. DEM-ML investigation of bauxite pillar strength prediction method[J]. *Journal of China Coal Society*, 2024, 49(7): 3038–3050.
- [28] RASHED G, SLAKER B, SEARS M M, et al. A parametric study for the effect of dip on stone mine pillar stability using a simplified model geometry[J]. *Mining, Metallurgy & Exploration*, 2021, 38(2): 967–977.
- [29] GARZA-CRUZ T, PIERCE M, BOARD M. Effect of shear stresses on pillar stability: a back analysis of the troy mine experience to predict pillar performance at montanore mine[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2019, 52(12): 4979–4996.
- [30] 李介立, 张家国, 陈全胜, 等. 他白依隧道软岩大变形控制数值模

- 拟优化分析及现场试验[J]. 煤炭学报, 2024, 49(S2): 659–673.
- LI Jieli, ZHANG Jiaguo, CHEN Quansheng, et al. Numerical simulation optimization analysis and field test of large deformation control of soft rock in Tabaiyi tunnel[J]. Journal of China Coal Society, 2024, 49(S2): 659–673.
- [31] 董凌霄, 梁永, 杨家辉, 等. 基于机器学习和数值模拟的锅炉水冷壁热流密度分布预测模型[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2023, 54(9): 3657–3665.
- DONG Lingxiao, LIANG Yong, YANG Jiahui, et al. Prediction model of heat flux distribution on water-cooled wall of boiler based on machine learning and numerical simulation[J]. Journal of Central South University : Science and Technology, 2023, 54(9): 3657–3665.
- [32] LIN H L. GoogleNet transfer learning with improved gorilla optimized kernel extreme learning machine for accurate detection of asphalt pavement cracks[J]. *Structural Health Monitoring*, 2024, 23(5): 2853–2868.
- [33] 李占山, 姚鑫, 刘兆赓, 等. 基于 LightGBM 的特征选择算法[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2021, 42(12): 1688–1695.
- LI Zhanshan, YAO Xin, LIU Zhaogeng, et al. Feature selection algorithm based on LightGBM[J]. Journal of Northeastern University : Natural Science, 2021, 42(12): 1688–1695.
- [34] ZHU D F, TU S H, MA H S, et al. A 3D Voronoi and subdivision model for calibration of rock properties[J]. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2017, 25(8): 085005.
- [35] 于伟. 贺家圪台铝土矿长壁松动爆破综合机械化开采技术研究[D]. 太原: 太原理工大学, 2013.
- YU Wei. Research on the loosening blasting fullymechanized long-wall mining technology inhejiagetaibauxite [D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2013.
- [36] 沈彬彬. 风化与循环爆破协同作用下铝土矿采空区群失稳及控制研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2021.
- SHEN Binbin. Bauxite mine goaf group under the synergistic action of weathering and cyclic blasting instability and control research[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2021.
- [37] 杨超. 沉积型铝土矿采空区顶板损伤及失稳控制研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2020.
- YANG Chao. Study on roof damage and instability control in goaf of sedimentary bauxite mine[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2020.
- [38] 尹升华, 吴爱祥, 李希雯. 矿柱稳定性影响因素敏感性正交极差分析[J]. 煤炭学报, 2012, 37(S1): 48–52.
- YIN Shenghua, WU Aixiang, LI Xiwen. Orthogonal polar difference analysis for sensitivity of the factors influencing the ore pillar stability[J]. Journal of China Coal Society, 2012, 37(S1): 48–52.
- [39] LIANG W Z, LUO S Z, ZHAO G Y, et al. Predicting hard rock pillar stability using GBDT, XGBoost, and LightGBM algorithms[J]. *Mathematics*, 2020, 8(5): 765.
- [40] IANNACCHIONE A T. Analysis of pillar design practices and techniques for US limestone mines[J]. Mining Technology IMM Transactions section A, 1999, 108: 152–160.
- [41] WANG H, ARASTEH B, ARASTEH K, et al. A software defect prediction method using binary gray wolf optimizer and machine learning algorithms[J]. *Computers and Electrical Engineering*, 2024, 118: 109336.
- [42] 张恒哲. 基于遗传编程的演化可解释回归方法研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2022.
- ZHANG Hengzhe. Evolutionary interpretable regression method based on genetic programming[D]. Shanghai: East China Normal University, 2021.
- [43] 蒋凌云, 魏庆来, 张峰华, 等. 基于改进粒子群优化算法的 PID 控制器参数整定[J]. 控制工程, 2024, 31(3): 470–477.
- JIANG Lingyun, WEI Qinglai, ZHANG Fenghua, et al. PID controller parameter tuning based on improved particle swarm optimization algorithm[J]. Control Engineering of China, 2024, 31(3): 470–477.
- [44] 田嘉欣, 李浩源. 基于遗传编程的符号回归在化学和材料研究中的应用与展望[J]. 材料导报, 2024, 38(S1): 268–274.
- TIAN Jiaxin, LI Haoyuan. Application and prospects of symbolic regression based on genetic programming in chemistry and materials[J]. Materials Reports, 2024, 38(S1): 268–274.